記号	数	番号	

検査Ⅴ　**数学解答例**

1　【(1)～(7):各5点　計 35 点】

(1)	$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$	(2)	$\dfrac{11}{233}$
(3)	$\dfrac{8}{9}$	(4)	$a=8$，$b=-6$，$c=1$
(5)	270	(6)	$3\sqrt{6}$
(7)	$\dfrac{1}{2}$		

2　【(1)(2):各6点　計 12 点】

(1) 与えられた式を変形すると，

$$y=\sqrt{10}\sin(x+\alpha)$$

ただし，α は $\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ を満たす鋭角である。

$0\leqq x<2\pi$より，$\alpha\leqq x+\alpha<2\pi+\alpha$ であるから，$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1$

よって，$x+\alpha=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき，最小値は $-\sqrt{10}$

(2) (1) より，y が最小となるとき，$\theta=\dfrac{3}{2}\pi-\alpha$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta&=\cos(3\pi-2\alpha)\\&=-\cos 2\alpha\\&=-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\\&=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

記号	数	番号	

検査Ⅴ　数学解答例

3　【10 点】

1 回のじゃんけんで 2 人だけが勝つ確率は　${}_4\mathrm{C}_2 \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{9}$　であるから，

X は二項分布 $B\left(100,\ \frac{2}{9}\right)$ に従う確率変数である。

よって，$E(X) = 100 \times \frac{2}{9} = \frac{200}{9}$　　$\sigma(X) = \sqrt{100 \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{9}} = \frac{10\sqrt{14}}{9}$

4　【12 点】

$2^x + 2^{-x} = t$とおくと，

$2^x > 0$，$2^{-x} > 0$なので，相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$t = 2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

$(2^x + 2^{-x})^3 = t^3$より，$8^x + 8^{-x} = t^3 - 3t$

$(2^x + 2^{-x})^2 = t^2$より，$4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$

よって方程式は

$$t^3 - 4t^2 - t + 4 = 0$$

これを解いて，$t = -1$，1，4

$t \geqq 2$より，$t = 4$

つまり，$2^x + 2^{-x} = 4$

両辺を2^x倍して，$(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 = 0$

$2^x = 2 \pm \sqrt{3}$　　これは $2^x > 0$ をみたす。

したがって，$x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$

記号	数	番号	

検査Ⅴ　**数学解答例**

5【(1) (2) : 各8点　計 16 点】

（１）$f(x)=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$

放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ が $2\leqq x\leqq 5$ で接するときを考える。

$x^2-6x+11=ax$　すなわち　$x^2-(a+6)x+11=0$　……①

が $2\leqq x\leqq 5$ の範囲に重解をもてばよい。

①の判別式を D とすると

$$D=(a+6)^2-44=a^2+12a-8$$

①が重解をもつとき，$D=0$ であるから

$$a^2+12a-8=0$$

$$a=-6\pm 2\sqrt{11}$$

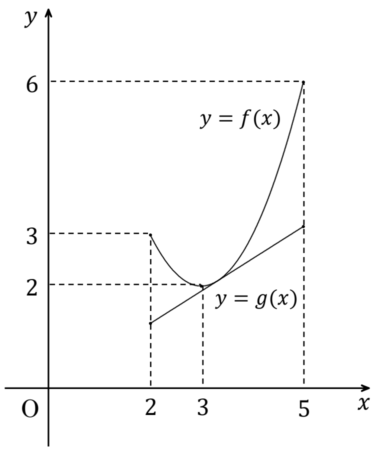
$a=-6+2\sqrt{11}$ のとき，①の解は $x=\sqrt{11}$

$a=-6-2\sqrt{11}$ のとき，①の解は $x=-\sqrt{11}$

よって，$2\leqq x\leqq 5$ の範囲に重解をもつのは　$a=-6+2\sqrt{11}$

したがって，求める a の値の範囲は

$$a\geqq -6+2\sqrt{11}$$



（２）$a\leqq 0$のとき

$2\leqq x\leqq 5$ をみたす全ての x について

$g(x)<f(x)$ となるので不適。

$a>0$のとき

$2\leqq x\leqq 5$ における $f(x)$ の最小値を m，$g(x)$ の最大値を M とおくと

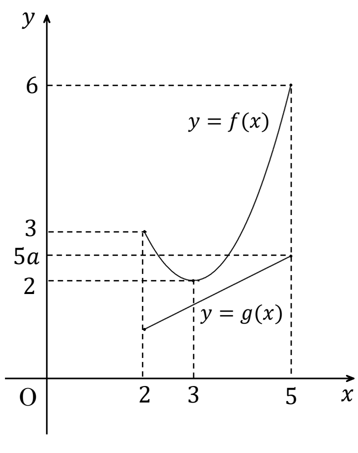
$$m=2,\ M=5a$$

$m\leqq M$ となるような a の値の範囲を求めればよいので

$$2\leqq 5a$$

$$a\geqq \frac{2}{5}$$　これは $a>0$ をみたす。

以上より，　$a\geqq \dfrac{2}{5}$



記号	数	番号	

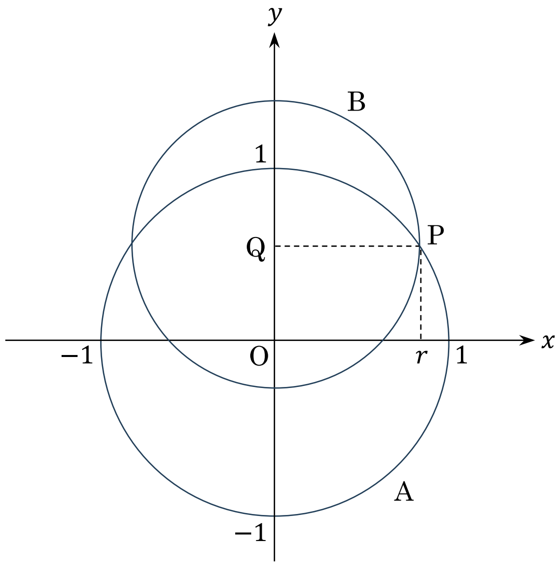
検査Ⅴ　**数学解答例**

6　【14 点】

円 A の方程式は　$x^2+y^2=1$,

点 Q の座標は　$\left(0,\ \sqrt{1-r^2}\right)$　$(0<r<1)$

で表される。



$$V=\frac{2}{3}\pi r^3+\pi\int_0^{\sqrt{1-r^2}}(1-y^2)\ dy+\frac{2}{3}\pi$$

$$\frac{dV}{dr}=2\pi r^2+\pi\{1-(1-r^2)\}\cdot\frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$=\frac{\pi r^2\left(2\sqrt{1-r^2}-r\right)}{\sqrt{1-r^2}}$$

$\dfrac{dV}{dr}=0$ とすると,

$$2\sqrt{1-r^2}-r=0$$

$$r^2=\frac{4}{5}$$

$$r=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

よって，右の表から Vは

$$r=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

のときに最大となる。

r	0	…	$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$	…	1
$\dfrac{dV}{dr}$		+	0	−	
V		↗	極大	↘	

記号	数	番号	

検査Ⅴ　**数学解答例**

7 【(1):8点, (2):5点, (3):8点　計 21 点】

（１）$n \geqq 2$のとき

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,(-\cos x)' dx$$

$$= [-\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x) dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

よって，$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

（２）$n=1$ のとき，$n\,I_1\,I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$n \geqq 2$ のとき，（１）より $nI_nI_{n-1} = n \cdot \dfrac{n-1}{n} I_{n-2} \cdot I_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}$ だから，

$nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2} = \cdots\cdots = 2\,I_2\,I_1 = 1\,I_1\,I_0 = \dfrac{\pi}{2}$　　よって，$nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ $(n \geqq 1)$

（３）$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ では，$0 \leqq \sin x \leqq 1$ より，$\sin^{n+1} x \leqq \sin^n x \leqq \sin^{n-1} x$

この各辺を 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで x で積分して，$I_{n+1} < I_n < I_{n-1}$　……①

$\sin^n x \geqq 0$ より $I_n > 0$ なので，①の各辺に I_n をかけて，$I_{n+1}I_n < {I_n}^2 < I_nI_{n-1}$

よって，（２）の結果を用いると，$\dfrac{\pi}{2(n+1)} < {I_n}^2 < \dfrac{\pi}{2n}$

すなわち，$\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} < I_n < \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} = 0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} = 0$ であるから，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$